Обучението по математика и информатика, брой 6, 1988 г.

ИНВАРИАНТИ В ТАБЛИЦИ ОТ ЧИСЛА

Митко Кунчев, МГ „Баба Тонка" - Русе

Главната трудност при решаването на някои задачи е откриването на характерна зависимост – число (инварианта), което не се променя при определени изменения на обекта на задачата.

Задачите, свързани с инварианти, можем да разделим на два вида – задачи, в които инвариантите са цел, и задачи, в които те са средство за решаването им. Тук ще разгледаме задачи от втория вид.

I. Някои известни идеи.

Задача 1. На черната дъска са написани числата 1, 2, 3, . . . , 1987. Изтриват се няколко от записаните числа и вместо тях се записва остатъкът при делението на тяхната сума на 7. След няколко стъпки на дъската остават две числа, едното от които е 987. Кое е другото число?

(Математика в школе, бр. 4, 1987, с. 58)

Задача 2. Дадена е квадратна таблица 3×3, в която са записани 9 числа. За една стъпка може към две съседни числа да прибавим едно и също число. (Съседни числа са тези, които са записани в квадратчета с обща страна.) Можем ли за няколко хода от таблица 1 да получим таблица 2 или таблица или таблица 3?

(Математика в школе, бр. 4, 1987, с. 57)

0	3	2
6	7	0
4	9	5

Табл.1

0	0	0
0	0	0
0	0	0

Табл. 2

1	0	1
0	0	0
1	0	1

Табл. 3

Задача 3. Във всяко квадратче на квадратна таблица с размери 25×25 е записано по едно от числата +1 или -1. Да означим с a_i произведението на всички числа от i –тия ред, а с b_j произведението на всички числа от j –тия стълб. Да се докаже, че $a_1+a_2+\ldots+a_{25}+b_1+b_2+\ldots+b_{25} \neq 0$.

(Математика, бр. 5, 1984, ЗШМ)

Задача 4. В редицата 1, 0, 1, 0, 1, 0, . . . всеки член с номер, по-голям от 6 е равен на последната цифра на сбора на предхождащите го шест члена на редицата. Да се докаже, че в тази редица липсва групата от последавателни членове . . ., 0, 1, 0, 1, 0, 1, . . .

(Кореспондентен кръжок, бр. 1, 1986, зад. 83)

Задача 5. Даден е набор от 2^k на брой +1 и -1. От него се получаванов набор по правилото: всяко число се умножава със следващото, а последното с първото. С новия набор се повтаря същото и т. н. Да се докаже, че накрая ще се получи набор само от +1.

(Гальперин, Г. А. Московские математические олимпиады, 1986, с. 77, зад. 40)

Задача 6. Правилен триъгълник е разбит от прави, успоредни на страните му, на правилни триъгълници. Един от малките триъгълници е черен, а останалите са бели. Разрешава се да се пребоядисват едновременно всички триъгълници, пресичани от права, успоредна на коя да е страна на триъгълника. Винаги ли е възможно с помощта на няколко такива пребоядисвания всички малки триъгълници да станат бели?

(Турнир на градовете, есенен кръг, 1987, 9. – 11. клас)

II. Някои нови идеи.

Задача 7. Дадена е таблица 4 със свойството: сумата от елементите във всеки ред, стълб или диагонал се дели на две. Разрешава се на една стъпка да се прехвърля единица от една клетка в съседната ѝ (съседни са клетки с обща страна). Може ли от таблица 4 да се получи таблица 5, в която всички числа b_j са четни?

a_1	a_2	a_3
a_4	2	a_5
a_6	a_7	a_8

Табл. 4

b_1	b_2	b_3
b_4	1	b_5
b_6	b_7	b_8

Табл. 5

Решение. От условието следва, че двойките числа a_2, a_7 и a_4, a_5 са от една четност. Тъй като 2 дели $a_1+a_4+a_6$ и $a_6+a_7+a_8$ следва, че 2 дели $a_1+a_4+2a_6+a_7+a_8$, т. е. 2 дели $a_1+a_4+a_7+a_8$. От условието имаме, че 2 дели a_1+2+a_8, т. е. 2 дели a_1+a_8. Тогава 2 дели a_4+a_7 и следователно a_4 и a_7 са с еднаква четност. Така стигаме до извода, че a_2, a_4, a_5 и a_7 са от една четност.

Ако a_2, a_4, a_5 и a_7 са четни, то a_1, a_3, a_6 и a_8 са или всички четни, или всички нечетни. Тогава броят на четните числа е 5 или 9.

Ако a_2, a_4, a_5 и a_7 са нечетни, то a_1, a_3, a_6 и a_8 са или всички четни, или всички нечетни. Тогава броят на четните числа е 1 или 5.

Извод. Броят на четните числа в таблицата е нечетно число - 1, 5 или 9.

Сега да разгледаме преобразуванието върху съседни клетки. Ако x и y са числа в съседни клетки, то имаме преход $x, y \rightarrow x-1, y+1$. Да разгледаме всички случаи за x и y по четност: (ч, ч), (ч, н) и (н, н). Лед преобразуванието ще получим съответно: (н, н), (н, ч) и (ч, ч) („ч" означава четно число, а „н" – нечетно).

Извод. Преобразуванието не променя четността на броя на четните числа (понеже той се променя с 0 или 2).

В таблица 4 има нечетен брой четни числа, а в таблица 5 – 8 четни числа, т. е. четен брой. Следователно такава таблица не може да се получи.

Задача 8. Даден е куб, съставен от 27 еднакви кубчета-клетки. Във всяка клетка има по едно число +1 или -1. Клетки, които имат обща страна, ще наричаме съседни. Сечение на куба ще наричаме всички съседни клетки, които лежат в една „равнина". Може едновременно да се сменят всички знаци в две сечения, които имат обща клетка, без да се сменят знаците на всички общи клетки.

Нека първоначално във всички клетки да има -1. Може ли след няколко стъпки -1 да има във всички върхове на куба, а в останалите клетки да има +1?

Решение. Нека да установим как се променя броят на -1 в клетките на куба при произволна стъпка. В две сечения се менят знаците на общо 12 числа. Нека n от тях са -1, а 12-n са +1. Тогава след смяната ще имаме n числа +1 и 12-n числа -1, т. е. броят на -1 се е променил с 12-n-n, т. е. с 2(6-n) – четно число. Следователно на всяка стъпка четността на броя на -1 се запазва. Първоначално -1 са 27, а искаме да станат 8 (толкова са върховете). Очевидно това е невъзможно.

Задача 9. Даден е куб, съставен от 27 еднакви кубчета-клетки. Във всяка клетка има по едно число +1. За една стъпка можем да прибавяме едно и също число към две съседни клетки (виж зад. 2). Може ли от дадения куб да се получи куб, при който:

а) във всички клетки има 0, а в централната (вътрешната) клетка -1;

б) във всички клетки има 0, а в централната (вътрешната) клетка +1?

Решение. а) Може – опитайте сами.

б) Нека да фиксираме една клетка и да я наречем бяла, съседните й клетки - черни, съседните на черните ще са бели и т. н. Тогава всяка клетка ще бъде бяла или черна, като няма да има бели съседни клетки, черни съседни клетки, а всяка бяла ще има черни съседни и обратно. Нека Б е сбора от числата в белите клетки, а Ч – сбора от числата в черните клетки. Изразът М = Б – Ч няма да променя стойността си при разглежданото преобразование, тъй като прибавяме едно и също число към бяла и черна клетка (т. е. към Б и Ч). Лесно се пресмята, че първоначалната стойност на М за дадения куб е 1 (например, ако централната клетка е черна, всички черни са 13, а всички бели – 14, тогава М = 14 – 13 = 1). За куба, който искаме да получим в точка б) обаче М = 0 – 1 = - 1. Полученото противоречие показва, че такъв куб не може да се получи.